

8. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 12 Q, Winter 2023/24

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 8.1 Untersuchen Sie, wo folgende Funktionen nach x bzw. y partiell differenzierbar sind (und wo nicht), und bestimmen Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen.

$$f(x, y) = x^y, \text{ wobei } x > 0,$$

$$g(x, y) = e^{xy^2} \ln(x^2 + y^2), \text{ wobei } (x, y) \neq (0, 0),$$

$$h(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^4}.$$

Aufgabe 8.2 Seien $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$$g(x, y) = y f(x, y).$$

Zeigen Sie:

- 1) f ist bei $(0, 0)$ partiell aber nicht total differenzierbar.
- 2) g ist (in allen Punkten) total differenzierbar.

Aufgabe 8.3 Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die zugehörige quadratische Form

$$q(\bar{x}) = \bar{x}A\bar{x}^T = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Zeigen Sie: q ist bei jedem $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, und für den Gradienten gilt:

$$\text{grad } q(\bar{a}) = 2\bar{a}A$$

Aufgabe 8.4 Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x, y) = 3xy^2 + x^2e^y$$

Bestimmen Sie für den Punkt $\bar{a} = (3, 0)$

- 1) den Gradienten $\text{grad}f(\bar{a})$,
- 2) die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a})$ in Richtung $\bar{v} = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$.

Aufgabe 8.5 Berechnen Sie die Tangentialebene $T_{\bar{a}}$ an die Fläche $N_{f(\bar{a})}$ im \mathbb{R}^3 für folgende Funktionen $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ im angegebenen Punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$.

- 1) $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - xy - yz$, $\bar{a} = (1, 2, 3)$.
- 2) $f(x, y, z) = e^x - yz$, $\bar{a} = (1, 1, e)$.